www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours des 22, 23 et 24 mai 1989 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

***

MATHEMATIQUES

(Option M)

(à distribuer aux candidats)

***

NOTATIONS

$\mathbf{C}$ désigne le corps des complexes et $\mathbf{R}$ le corps des réels.
On se place dans un plan affine euclidien orienté $\prod$, rapporté à un repère orthonormé. A tout z de $\mathbf{C}$, on associe le point M de $\prod$ d'affixe z.
Soit $V=\mathbf{C}^n$ où n est un entier strictement positif.
Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n points de $\prod$ d'affixes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $P=(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ le n-uplet de $\prod^n$, appelé polygone de n sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$. On convient d'identifier le polygone $P=(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ avec l'élément de V noté encore $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ où p_i est l'affixe de P_i. On appelle quadrilatère tout polygone de 4 sommets.

V est muni du produit scalaire $\langle P,P' \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{p_i} p'_i$ où $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et $P'=(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)$.

On note $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} |p_i|^2}$.

Soit k un entier, $1 \le k \le n$, soit $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un élément de V et $Q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ l'élément de V défini par :

$$q_1 = \frac{p_1+\ldots+p_k}{k}, \quad q_2 = \frac{p_2+\ldots+p_{k+1}}{k}, \quad \ldots\ldots, \quad q_n = \frac{p_n+p_1+\ldots+p_{k-1}}{k},$$

c'est à dire que q_i est l'isobarycentre de k sommets consécutifs de P à partir de p_i. Q est appelé le polygone k-descendant de P.

Question préliminaire:
Caractériser géométriquement le polygone 2-descendant d'un quadrilatère .
Tout polygone Q est-il k-descendant d'un polygone P ?

Soit t l'application linéaire de V dans V qui à P associe Q, le polygone k-descendant de P. On note Q=t(P). Q, élément de V, est un polygone k-spécial s'il existe P de V tel que Q=t(P).
On veut trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone Q soit k-spécial et montrer qu'il existe une transformation linéaire b de V telle que :

i) $b \circ t = t \circ b$

ii) b(Q) est le seul polygone k-spécial tel que : $\forall P \in V \ \|t \circ b(Q) - Q\| \le \|t(P) - Q\|$.

b est appelée alors la pseudo-inverse de t .

PARTIE I
Etude des matrices circulantes

1) Donner la matrice T de l'application t dans la base canonique de V.

2) Une matrice A carrée d'ordre n à coefficients complexes est dite circulante si elle est de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

Soit $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et I la matrice unité d'ordre n .

Montrer que l'ensemble des matrices circulantes d'ordre n à coefficients complexes est un espace vectoriel dont une base est $I, C, C^2, \ldots, C^{n-1}$. Donner la décomposition de T dans cette base.

3) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, montrer que A est une matrice circulante si et seulement si $AC = CA$.
[Ind.: on pourra considérer le vecteur $a=(1,0,\ldots,0)$ de V et les images de a par les C^i, $0 \le i \le n-1$]

4) Soit $\lambda_j = e^{ij\theta}$ où $\theta = \frac{2\pi}{n}$ et $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

a) Montrer que $(\lambda_j)_{1 \le j \le n}$ sont les n valeurs propres de C.
Déterminer U_j un vecteur propre de C, de norme 1, associé à la valeur propre λ_j.

b) Montrer que les $(U_j)_{1 \le j \le n}$ forment une base orthonormale de V.

c) Montrer que si A est une matrice circulante, alors U_j est un vecteur propre de A. Soit λ_j^* la valeur propre associée. Exprimer λ_j^* en fonction de λ_j et des coefficients de la matrice A.

d) Soit A une matrice circulante ; déterminer une base de Ker A et une base de Im A à l'aide des vecteurs $(U_j)_{1 \le j \le n}$.

Montrer que : $V = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A$ et que : $(\text{Ker } A)^{\perp} = \text{Im } A$. ($F^{\perp}$ désigne l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de V)

5)

a) Trouver les valeurs propres $(\lambda_j^*)_{1 \le j \le n}$ de T.

b) Montrer que tout polygone Q de n sommets est le k-descendant d'un unique polygone P si et seulement si k et n sont premiers entre eux.

6) Soit d le pgcd positif de k et n. On suppose dans cette question que d>1 et soient r et s les entiers tels que : k=ds et n=dr

a) montrer que Ker T est de dimension (d-1).
Donner une base orthonormale de Ker T : $(V_1, \ldots, V_{d-1})$. On pourra noter $c = e^{2i\pi/d}$.

b) Soit $W=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

i) $W \in \text{Ker } T$

ii) $\sum_{k=1}^{k=d} w_k = 0$ et W est de la forme $W=(w_1, \ldots, w_d, w_1, \ldots, w_d, \ldots\ldots, w_1, \ldots, w_d)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS
M-Math 2

c) Montrer que : $X \in \text{Im } T \Leftrightarrow \forall i \in \{1,....,d-1\}\ \ <V_i, X> = 0$.

Soit $Q=(q_1, q_2,....., q_n) \in V$.
Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

i) Q est k-spécial

ii) $q_1 + q_{d+1} +....+ q_{(r-1)d+1} = q_2 + q_{d+2} +....+ q_{(r-1)d+2} = ... = q_d + q_{2d} +....+ q_{rd}$.

iii) $\begin{cases} (q_2 - q_1) + (q_{d+2} - q_{d+1}) +....+ (q_{(r-1)d+2} - q_{(r-1)d+1}) = 0 \\ (q_3 - q_2) + (q_{d+3} - q_{d+2}) +....+ (q_{(r-1)d+3} - q_{(r-1)d+2}) = 0 \\ ..... \\ (q_d - q_{d-1}) + (q_{2d} - q_{2d-1}) +....+ (q_{rd} - q_{rd-1}) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire que pour chaque sommet de Q la somme vectorielle des arêtes "de d en d" est nulle.

7) Montrer que tout polygone k-spécial Q est le k-descendant d'un unique polygone k-spécial.

PARTIE II
Pseudo-inverse de t

L(E,F) désigne l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Id_E désigne l'application identité de E.

Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$. Soient n et p des entiers naturels non nuls, on considère les espaces vectoriels $E=\mathbf{K}^n$ et $F=\mathbf{K}^p$, munis de leur produit scalaire canonique.

$[\ <x,y> = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{x}_i y_i$ si $\mathbf{K}=\mathbf{C}$; $<x,y> = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, avec $x=(x_1,...., x_n)$ et $y=(y_1,...., y_n)]$

Soit $a \in L(E,F)$.

1°)

a) Montrer que: $\forall y \in F\ \exists x \in (\text{Ker } a)^{\perp}$ et $\exists y' \in (\text{Im } a)^{\perp}$ tel que $y = a(x) + y'$ et que x et y' sont définis de manière unique.
Soit alors b l'application de F dans E qui à y associe x. On note x=b(y).
b est appelée la pseudo-inverse de a.

b) Montrer que b est linéaire.

c) Montrer que : $\text{Im } b = (\text{Ker } a)^{\perp}$.

d) Montrer que : $a \circ b \circ a = a$ et $b \circ a \circ b = b$.

e) Montrer que : $b \circ a$ et $(Id_E - b \circ a)$ sont des projecteurs orthogonaux que l'on caractérisera par leur image et leur noyau.

f) Montrer que b(y) est le seul vecteur de Im b tel que : $\forall z \in E\ \ \|a(b(y)) - y\| \leq \|a(z) - y\|$.

2°) Dans la suite de cette partie II, $E = F = \mathbf{C}^n = V$
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, circulante associée à une application linéaire a de E dans E dans la base canonique de E. Soit B la matrice de la pseudo-inverse de a dans la base canonique de E et C la matrice définie au I-2°).

a) Calculer BU_i en fonction de U_i et λ_i^*, où $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base définie dans la partie I.

b) Montrer que : CB = BC et en déduire que B est circulante.

c) Montrer que : AB = BA.

3°) Soit b la pseudo-inverse de t définie dans la partie préliminaire. Montrer que :

a) $t \circ b = b \circ t$

b) $b(Q) = b \circ t \circ b(Q)$, pour tout polygone Q.

c) $t(Q) = t \circ b \circ t(Q)$, pour tout polygone Q.

d) b(Q) est le seul polygone k-spécial tel que : $\forall P \in V\ \ \|t \circ b(Q) - Q\| \leq \|t(P) - Q\|$.

4°) Trouver la pseudo-inverse de t dans les cas suivants :

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[on pourra d'abord calculer la matrice de b dans la base $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$]

PARTIE III
Propriété métrique de la pseudo-inverse

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls ; on considère les espaces vectoriels $E=\mathbf{R}^n$, $F=\mathbf{R}^p$, $G=\mathbf{R}^q$, munis de leur structure euclidienne canonique.
Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on note Tr(A) la somme des coefficients de la diagonale de A. Si A est une matrice à p lignes et n colonnes à coefficients réels, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

1°) Soit $a \in L(E,F)$, on définit $\|a\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tA.A)} = \|A\|$, où A est la matrice de a dans des bases orthonormales de E et F.

a) Justifier cette définition.

b) Vérifier que $a \rightarrow \|a\|$ est une norme sur L(E,F).

Dans toute la suite, a désigne un élément de L(E,F) fixé et v un élément de L(E,G) fixé. Soit enfin b la pseudo-inverse de a.

On considère désormais l'équation d'inconnue $u \in L(F,G)$: $u \circ a = v$.
On dira que $u_1 \in L(F,G)$ est une pseudo-solution de cette équation si :

$$\|u_1 \circ a - v\| = \text{Inf}\{\ \|u \circ a - v\|\ ,\ u \in L(F,G)\}.$$

2°) Montrer en utilisant b que l'équation " $u \circ a = v$ " a une solution si et seulement si $\text{Ker } a \subset \text{Ker } v$.

3°) Soit p le projecteur orthogonal de F sur Im a.
Montrer que : $u \circ a = 0 \Leftrightarrow u = z \circ (Id_F - p)$ où $z \in L(F,G)$.

4°) En déduire que si l'équation " $u \circ a = v$ " a une solution, toute solution s'écrit sous la forme : $u = v \circ b + z \circ (Id_F - p)$ où $z \in L(F,G)$.

5°) Nous supposons que l'équation " $u \circ a = v$ " a une solution ; montrer que $v \circ b$ est la seule solution de norme minimum c'est-à-dire :

$$\|v \circ b\| = \text{Inf}\{\|u\| \text{ tel que } u \in L(F,G) \text{ et } u \circ a = v\}$$

6°) Soit q le projecteur orthogonal de E sur $(\text{Ker } a)^{\perp}$.

a) Montrer que : $\|v - u \circ a\|^2 = \|v - v \circ q\|^2 + \|v \circ q - u \circ a\|^2$.

b) En utilisant III-2°), montrer que l'équation : $v \circ q = u \circ a$, a au moins une solution u.

c) En déduire que : (u est solution de l'équation : $v \circ q = u \circ a$) si et seulement si (u est une pseudo-solutionde l'équation : $u \circ a = v$).

d) Montrer que $v \circ b$ est la seule pseudo-solution de norme minimum de l'équation : $u \circ a = v$, c'est-à-dire : $\|v \circ b\| = \text{Inf}\{\|u\| \text{ tel que } u \in L(F,G) \text{ et } u \text{ pseudo-solution de l'équation : } u \circ a = v\}$.
En déduire que b est la seule pseudo-solution de norme minimum de l'équation : $u \circ a = Id_E$.

* * * * *

page 2/8 INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS 1989 2 M-Math 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail